

Capítulo 4.

Inducción Electromagnética y Corrientes Variables.

4.1 Ley de Faraday (1831) de la inducción:

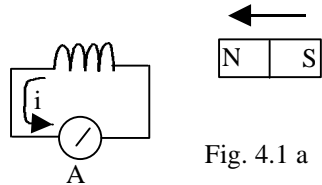


Fig. 4.1 a

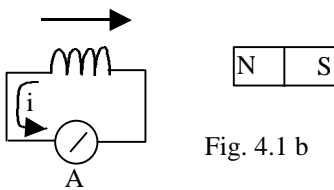


Fig. 4.1 b

Nótese el movimiento relativo entre imán y bobina. Sin esta condición $i = 0$

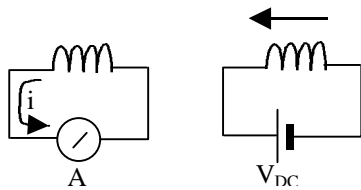


Fig. 4.1 c

Ahora el campo magnético se debe a una corriente continua

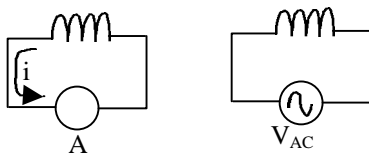


Fig. 4.1 d

El campo magnético es producido por una corriente alterna.

La presencia de la corriente eléctrica inducida detectada con el amperímetro implica la existencia de una fem ; el movimiento relativo o el uso de una corriente alterna para crear el campo magnético implican un campo \mathbf{B} variable en el tiempo, que se traduce en un flujo magnético de igual naturaleza a través del circuito con el amperímetro; experimentalmente se encuentra que la fem inducida aumenta con el número de vueltas de la bobina.

$$fem = -\frac{d}{dt}(N\Phi_m) \quad (4.1a)$$

$$fem = -\frac{d}{dt} \Lambda \quad (4.1b)$$

donde el signo - es debido a la ley de Lenz y

Λ es el flujo concatenado.

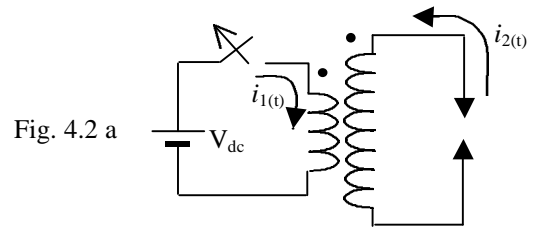


Fig. 4.2 a

Sistema de encendido para auto motor

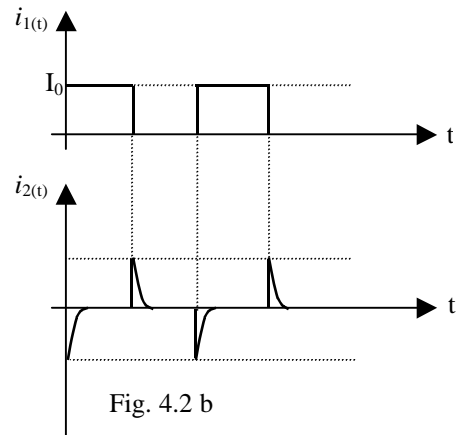


Fig. 4.2 b

El trabajo experimental puede ser abstraído como en la fig. 4.3

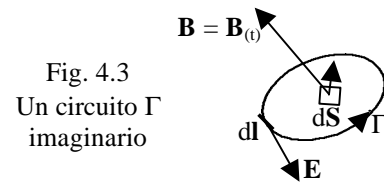


Fig. 4.3
Un circuito Γ imaginario

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad fem = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Por ec. (4.1) a $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2)$

4.1.1 Sistema en reposo:

Sea el caso de un observador en un sistema de referencia para el cual Γ y S son fijos, invariables en el tiempo, pero $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$

Para ec. (4.2):

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

en cualquier punto del espacio.

Como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ así:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

De donde: $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla f \quad (4.4)$

4.1.2 Sistemas en movimiento relativo:

Para sistemas inerciales no relativísticos, la fuerza es invariante.

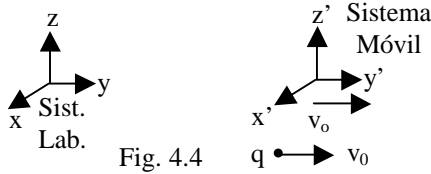


Fig. 4.4

$$\mathbf{F}_q = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) = q\mathbf{E}'$$

Por la condición citada: $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$ (4.5)

Sí $v_0 \ll c$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$

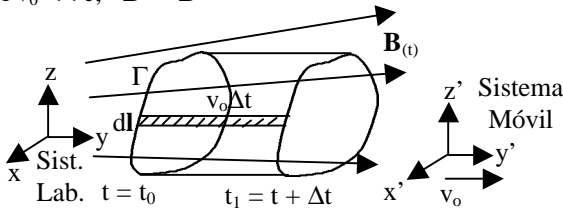


Fig. 4.5

Para la superficie lateral del volumen generado:

$$d\mathbf{S}_2 = d\mathbf{l} \times \mathbf{v}_0 \Delta t$$

Según lo visto en 4.2.1: $fem' = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t}$ si $\Delta t \rightarrow 0$,

porque para el observador o' el circuito está en reposo. El cambio de flujo se puede hallar usando la ley de Gauss para \mathbf{B} evaluado en $t = t + \Delta t$.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \oint_{S_{Total}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_{(t+\Delta t)} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_S \mathbf{B}_{(t+\Delta t)} \cdot (-d\mathbf{S}) +$$

$$\int_{S_2} \mathbf{B}_{(t+\Delta t)} \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_{(t+\Delta t)} \cdot d\mathbf{S}_1 - \int_S \mathbf{B}_{(t)} \cdot d\mathbf{S}$$

$$- \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cdot d\mathbf{S} + \oint_C \mathbf{B}_{(t+\Delta t)} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{v}_0 \Delta t = 0$$

como: $\Delta\Phi_m = \int_{S_1} \mathbf{B}_{(t+\Delta t)} \cdot d\mathbf{S}_1 - \int_S \mathbf{B}_{(t)} \cdot d\mathbf{S}$

La ecuación queda:

$$\Delta\Phi_m - \Delta t \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \Delta t \oint_C \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Dividiendo entre Δt y llevando el límite de $\Delta t \rightarrow 0$:

$$fem' = \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} \right\} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Gamma} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$fem' = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

..... (4.6)a

De aquí:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left[- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S}$$

$$\therefore \nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.6)b$$

De la ec. (4.5) $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ lo que demuestra que el

estado de movimiento no altera la ley de Faraday en su forma diferencial; es decir la ec. 4.3 es invariante.

Las ecuaciones fundamentales para la solución de problemas son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})$$

Ejemplo 4.1:

Describir todos los fenómenos de inducción para el sistema de la fig. 4.6 a, con una barra conductora ac. Asumir que \mathbf{B} existe en una región cilíndrica muy extensa.

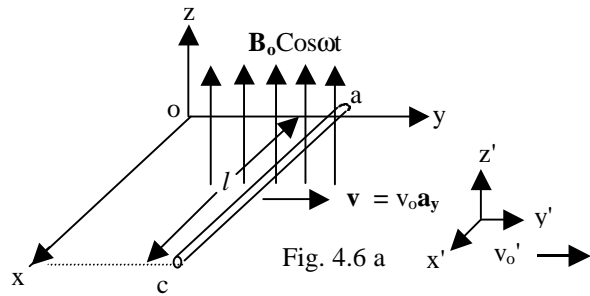


Fig. 4.6 a

Solución: Como: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$ entonces independiente-

mente de la presencia de la barra existe un campo tal que $\nabla \times \mathbf{E} = B_0 \omega \sin wt \mathbf{a}_z$. Por simetría cilíndrica y la analogía con $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, escribimos:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \leftrightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

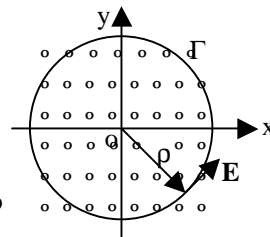


Fig. 4.6 b

$$2prE = (B_0 \omega \sin wt)(pr^2)$$

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{B_0 \omega r \sin wt}{2} \mathbf{a}_\phi, \quad \mathbf{a}_\phi = -\sin j \mathbf{a}_x + \cos j \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{E} = \frac{B_0 \omega r \sin wt}{2} (-y \mathbf{a}_x + x \mathbf{a}_y) \quad \text{Sistema de laboratorio.}$$

En el sistema móvil:

$$\mathbf{E}' = \frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y' \mathbf{a}_x + x' \mathbf{a}_y)$$

$$x' = x, \quad y' = y - v_0 t$$

Si se colocase una espira conductora sobre Γ en E hallado producirá una corriente eléctrica inducida en aquella.

El observador en el sistema móvil ve la barra en reposo; luego:

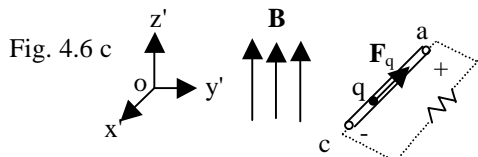
$$\mathbf{E}'_{barra} = \frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y' \mathbf{a}_x + x' \mathbf{a}_y)$$

El observador del laboratorio (según la ec. 4.5) mide:

$$\mathbf{E}_{barra} = \mathbf{E}'_{barra} - v_0 \mathbf{a}_y \times B_0 \cos \omega t \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_{barra} = \frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y' \mathbf{a}_x + x' \mathbf{a}_y) - v_0 B_0 \cos \omega t \mathbf{a}_x$$

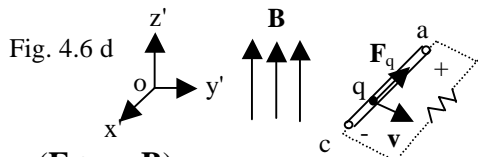
Notar que si fuese \mathbf{B} constante y uniforme ($\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$): $\mathbf{E}'_{barra} = 0$ porque $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, la situación es electrostática; también $\mathbf{E}_{barra} = -v_0 B_0 \mathbf{a}_x$ este campo es necesario para que el conductor en movimiento permanezca con sus cargas en equilibrio. Hallaremos la fem usando la definición como "trabajo por unidad de carga".



$$\mathbf{F}'_q = q \mathbf{E}' = \frac{q B_0 \omega \sin \omega t}{2} [-y' \mathbf{a}_x - x' \mathbf{a}_y]$$

$$fem' = \frac{W_{c \rightarrow a}}{q} = \frac{1}{q} \int_c^a \mathbf{F}'_q \cdot d\mathbf{l}' \quad d\mathbf{l}' = dx' \mathbf{a}_x$$

$$fem' = \frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} \int_{xx'=l}^0 (-y' dx') = \frac{B_0 \omega l y' \sin \omega t}{2}$$



$$\mathbf{F}'_q = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F}'_q = \frac{q B_0 \omega \sin \omega t}{2} [-y' \mathbf{a}_x - x' \mathbf{a}_y] + q v_0 B_0 \cos \omega t \mathbf{a}_x$$

$$fem = \frac{1}{q} \int_c^a \mathbf{F}'_q \cdot d\mathbf{l} = \frac{B_0 \omega l y \sin \omega t}{2} - v_0 B_0 l \cos \omega t$$

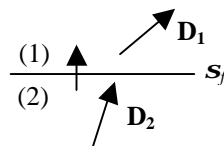
Si el extremo "a" de la barra coincide con o', entonces $y' = 0$ y $fem = 0$. También: $y = v_0 t$, luego:

$$fem = \frac{B_0 \omega l v_0 t \sin \omega t}{2} - v_0 B_0 l \cos \omega t$$

para $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$ queda $fem = -v_0 B_0 l$; obsérvese que es la fuerza de Lorentz el agente que asegura el funcionamiento de un dinamo.

Como la barra para ambos observadores es un conductor en una región donde existe campo eléctrico entonces aquella presentará una distribución de carga.

Hallamos las densidades superficiales en los extremos "a" y "c" usando la condición de frontera:



$$\mathbf{s}_f = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}$$

Para o el campo exterior a la barra es el ya hallado:

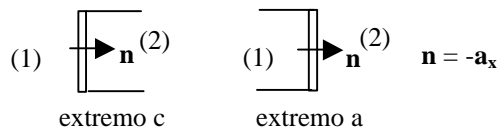
$$\mathbf{E}_{ext} = \mathbf{E} = \frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y \mathbf{a}_x + x \mathbf{a}_y)$$

De la ec. (4.5), para o' es:

$$\mathbf{E}'_{ext} = \frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y \mathbf{a}_x + x \mathbf{a}_y) + v_0 B_0 \cos \omega t \mathbf{a}_x$$

Los campos en la barra ya fueron hallados

Para o:



$$\mathbf{s}_{fc} = \mathbf{e}_0 \left[\frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y' \mathbf{a}_x) - v_0 B_0 \cos \omega t \mathbf{a}_x - \frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y \mathbf{a}_x) \right] \cdot [-\mathbf{a}_x]$$

$$\mathbf{s}'_{fc} = \mathbf{e}_0 \left[\frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (y' - y) + v_0 B_0 \cos \omega t \right]$$

$$\mathbf{s}_{fa} = -\mathbf{e}_0 \left[\frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (y' - y) + v_0 B_0 \cos \omega t \right]$$

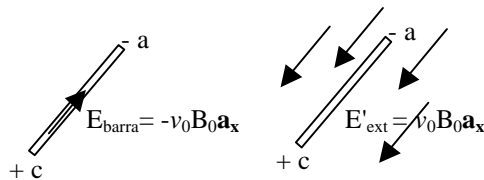
Repitiendo para o' se concluye que:

$$\mathbf{s}'_{fc} = \mathbf{s}_{fc} \quad \mathbf{s}'_{fa} = \mathbf{s}_{fa}$$

Sea otra vez el caso de un $\mathbf{B} = \text{cte.}$; tendremos:

$$\mathbf{E}_{ext} = 0 \quad \mathbf{E}'_{ext} = v_0 B_0 \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{s}_{fc} = \mathbf{e}_0 v_0 B_0 \quad \mathbf{s}_{fa} = -\mathbf{e}_0 v_0 B_0$$



Este campo se debe a la separación de cargas por la fuerza de Lorentz

Este campo induce las cargas en el conductor

$$fem = v_0 B_0 l$$

Ejemplo 4.2:

Recalcular la *fem* para el ejemplo 4.1 usando la forma integral de la ley de Faraday.

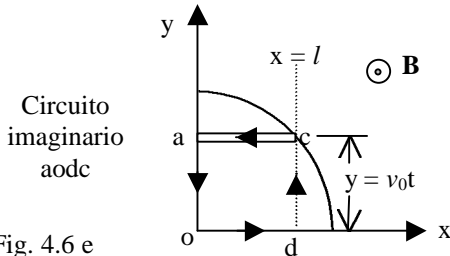


Fig. 4.6 e

Sea el circuito: caodc (Notar sentido de circulación)

$$\oint_{caodc} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\int_d^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + 0 + 0 = -\frac{d}{dt} (B_0 (\cos \omega t) l y)$$

$$\int_{y=0}^{v_0 t} \left[\frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} (-y \mathbf{a}_y + l \mathbf{a}_y) \right] \cdot [d y \mathbf{a}_y] + fem =$$

$$= (B_0 \omega \sin \omega t) (l v_0 t) - (B_0 \cos \omega t) (l v_0)$$

$$\left(\frac{B_0 \omega \sin \omega t}{2} \right) (l v_0 t) + fem =$$

$$= (B_0 \omega \sin \omega t) (l v_0 t) - (B_0 \cos \omega t) (l v_0)$$

$$fem = \frac{B_0 \omega l v_0 t}{2} \sin \omega t - v_0 B_0 l \cos \omega t$$

Ejemplo 4.3:

Relatividad de los campos **E** y **B**:

Conductor en reposo en el sistema de laboratorio

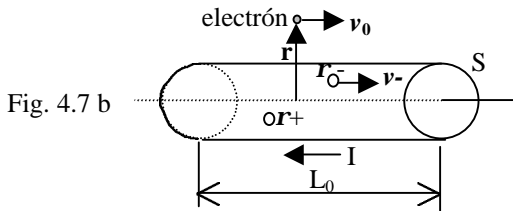


Fig. 4.7 b

$$\mathbf{v}_- = \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{a}_z \quad \mathbf{r} = r \mathbf{a}_r \quad \mathbf{r}_+ + \mathbf{r}_- = 0$$

El electrón experimenta una fuerza: $\mathbf{F} = q \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = -e (v_0 \mathbf{a}_z) \times \left[\frac{-\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi \right] = -\frac{e v_0 \mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

se concluye que el electrón es atraído hacia el conductor; recordando que: $I = \mathbf{r}_+ v_0 S$, entonces:

$$\mathbf{F} = -\frac{e v_0^2 \mu_0 \mathbf{r}_+ S}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

Para el observador en el sistema móvil el conductor tiene velocidad $-\mathbf{v}_0$

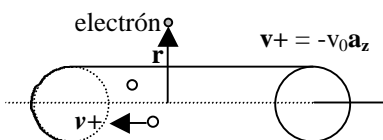


Fig. 4.7 b

Si consideramos que el conductor permanece eléctricamente neutro, entonces la fuerza de Lorentz es nula y el electrón debe permanecer en reposo; esto no es aceptable debido al cálculo anterior.

Por contracción de longitud:

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}$$

Siendo la carga eléctrica invariante luego:

$$Q = L_0 r S = L' r' S \rightarrow r' = \frac{L_0}{L'} r$$

$$\mathbf{r}'_{movil} = \frac{\mathbf{r}_{reposito}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}}$$

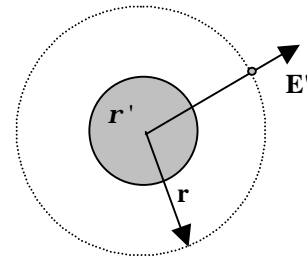
Para iones positivos: $\mathbf{r}'_+ = \frac{\mathbf{r}_+}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}}$

Para electrones: $\mathbf{r}'_- = \frac{\mathbf{r}_-}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}}$

En el sistema móvil existe una densidad volumétrica neta:

$$\mathbf{r}'_+ + \mathbf{r}'_- = \frac{\mathbf{r}_+}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} - \mathbf{r}_+ \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2} = \frac{\mathbf{r}_+ \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}}$$

Fig. 4.7 c



$$(2\pi r L') E' = \frac{\mathbf{r}' S L'}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{r}' S}{2\pi \epsilon_0 r} \mathbf{a}_r$$

el electrón experimenta una fuerza: $\mathbf{F} = -e \mathbf{E}'$

$$\mathbf{F} = -\frac{e v_0^2 \mu_0 \mathbf{r}_+ S}{2\pi r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} \right] \mathbf{a}_r$$

recordando que: $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$

También recordamos la dilatación del tiempo:

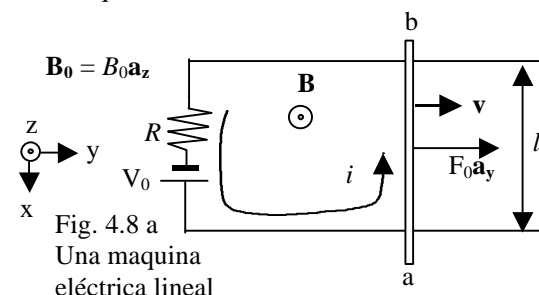
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t = - \left[\frac{e v_0^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{r}_+ S}{2 p r} \right] \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \mathbf{a}_r = \mathbf{F}' \Delta t' = \Delta \mathbf{p}$$

Conservación del momentum lineal.

4.2 Conversión electromecánica:

Una máquina eléctrica lineal:



Rozamiento f_r constante, barra ab tiene masa m
La corriente i se hallará por superposición:

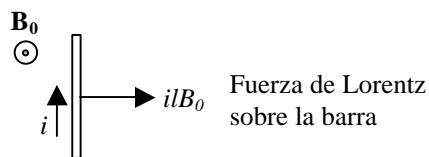
$$\Phi_m = y l B_0$$

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = l B_0 \frac{dy}{dt} = l B_0 v$$

Por ley de Lenz: $i_1 = \frac{l B_0 v}{R}$ (4.7)a

$B_0 l v$ es la "fem por movimiento"

Considerando el efecto de la batería: $i = \frac{V_0}{R} - \frac{l B_0 v}{R}$



Ecuación dinámica sobre la barra:

$$F_0 - f_r + i l B_0 = m \frac{dv}{dt}$$

$$F_0 - f_r + \frac{V_0 l B_0}{R} + \frac{(l B_0)^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{R}{(B_0 l)^2} \left[F_0 - f_r + \frac{V_0 l B_0}{R} \right] \left[1 - e^{-t/\tau} \right], \quad \tau = \frac{m R}{(B_0 l)^2}$$

..... (4.7)b

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} - \frac{1}{(B_0 l)} [F_0 - f_r] \left[1 - e^{-t/\tau} \right] \dots (4.7)c$$

Sí $i > 0$, $B_0 l v$ es llamada "fuera contra-electromotriz" y la máquina trabaja como motor energizado por la fuente V_0 ; puede ser $F_0 = 0$ y f_r incluiría la carga mecánica.

Si $i < 0$ $B_0 l v$ es la fem generada y la máquina trabaja como generador, impulsado por la fuerza F_0 ; puede ser $V_0 = 0$.

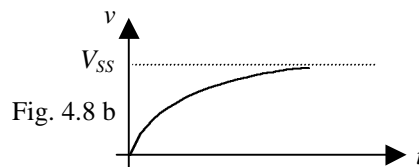


Fig. 4.8 b

$$V_{ss} = \frac{R}{(B_0 l)^2} \left[F_0 - f_r + \frac{V_0 l B_0}{R} \right]$$

Motor Lineal con $F_0 = 0$

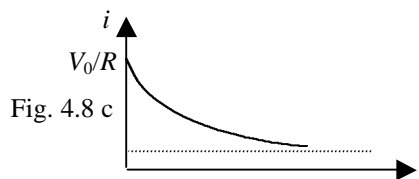


Fig. 4.8 c

Generador Lineal con $V_0 = 0$

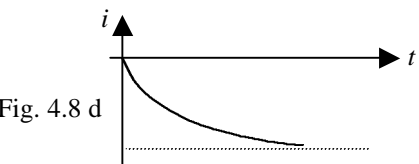


Fig. 4.8 d

4.3 Autoinductancia y coeficiente de autoinducción:

La autoinductancia es la propiedad de un circuito de producir inducción en el mismo.

Coeficiente de autoinducción: $L = \frac{\Lambda}{I}$ (4.8)a

Unidad: Henry (H), esta ecuación es aplicable si el medio donde está el circuito es lineal ($\mu = \text{cte}$) si μ no

es cte. usamos: $L = \frac{d\Lambda}{dt}$ (4.8)b

Ejemplo 4.4:

Solenoides ideales con entrehierro

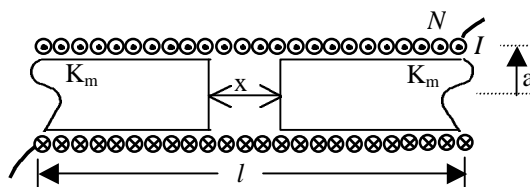
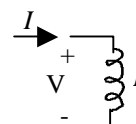


Fig. 4.9 a

$$\Phi_m = B p a^2 = \frac{\mathbf{m}_0 N I K_m p a^2}{[L + (K_m - 1)x]}$$

$$\Lambda = N \Phi_m = \frac{\mathbf{m}_0 N^2 I K_m p a^2}{[L + (K_m - 1)x]}$$



$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 K_m p a^2}{[L + (K_m - 1)x]}$$

Nótese la polaridad, consistente con la ley de Lenz.

Relación Volt-Ampere: $V = L \frac{dI}{dt} = -fem$

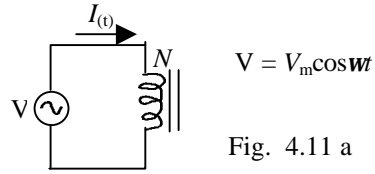
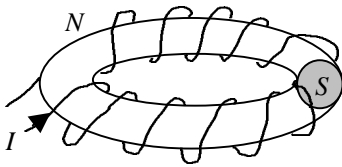


Fig. 4.11 a

Ejemplo 4.5:

Inductor de núcleo de hierro toroidal:



Sí: $2pr_0 = l$ entonces: $\Lambda = N\Phi_m = NSB$

$$NI = Hl \rightarrow dI = \frac{ldH}{N}, \quad d\Lambda = NSdB$$

De la ec. (4.8)b: $\frac{d\Lambda}{dI} dI = \frac{N^2 S}{l} \frac{dB}{dH} = L$

Nótese que es una magnitud variable.

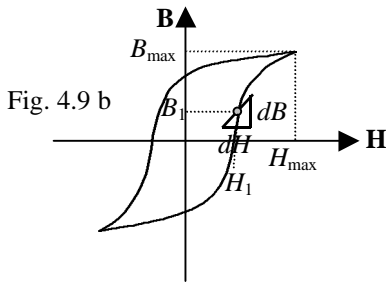


Fig. 4.9 b

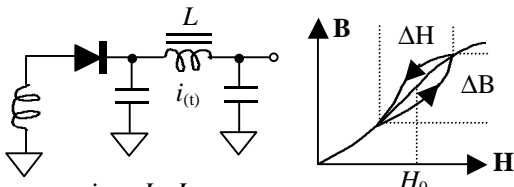
$$\mu_1 = \frac{dB}{dH} \text{ permeabilidad diferencial.}$$

En la práctica:

$$L_{ave} = \left(\frac{N^2 S}{l} \right) \mu_{ave} = \left(\frac{N^2 S}{l} \right) \frac{B_{max}}{H_{max}}$$

Ejemplo 4.6:

Inductor con corriente continua:



$$i(t) = I_0 + I_{AC}$$

Fig. 4.10 a

Fig. 4.10 b

$$L = \left(\frac{N^2 S}{l} \right) \mu_{nt} \quad \mu_{nt} = \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

Ejemplo 4.7:

Armónicos de la corriente en transformadores:

$$V_m \cos wt = N \frac{d\Phi_m}{dt} \rightarrow \Phi_m = \frac{V_m}{N\omega_0}$$

Se asume que el lazo de histéresis es muy estrecho (material blando)

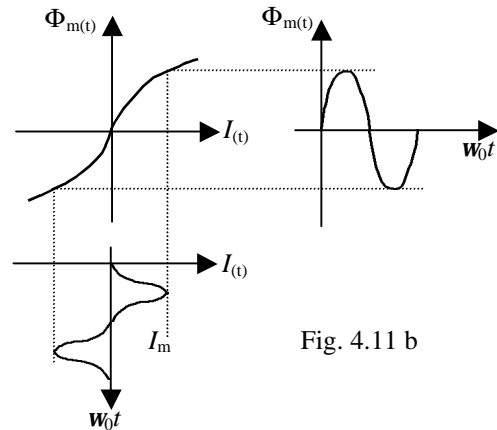


Fig. 4.11 b

Nótese la fuerte distorsión en la forma de onda para $I(t)$. Es porque si $V(\Phi_m)$ es elevado esta I_m puede causar problemas.

4.4 Inductancia mutua y coeficiente de inducción mutua:

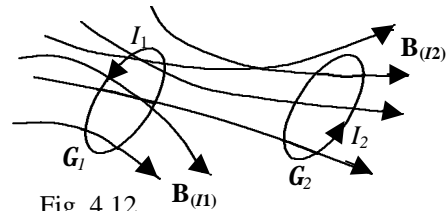


Fig. 4.12

Λ_{total} a través de (1) depende tanto de I_1 (flujo propio) como de I_2 (flujo mutuo)

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{flujo concatenado propio} \\ i \neq j & \text{flujo concatenado mutuo en } \Gamma_i \text{ debido a } I_j \end{cases}$$

Por superposición: $\Lambda_i = \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}$ para n circuitos (4.8)

Se define: $M_{ij} = \frac{\Lambda_{ij}}{I_j}$ medio lineal (4.9)a

$$M_{ij} = \frac{d\Lambda_{ij}}{dI_j} \text{ medio no lineal (4.9)b}$$

Propiedad: $M_{ij} = M_{ji} \quad fem_i = -\frac{d\Lambda_i}{dt}$ (4.10)

Ejemplo 4.8:

El transformador con núcleo toroidal:

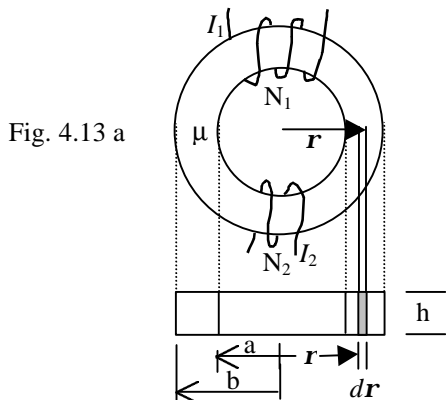


Fig. 4.13 a

Asumiremos que el núcleo tiene $\mu = \text{cte.}$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_1 I_1 \text{ con } I_2 = 0$$

$$H = \frac{N_1 I_1}{2\pi r}, \quad \Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \text{ en el núcleo}$$

$$\Phi_m = \int_{r=a}^b \frac{\mu N_1 I_1 h}{2\pi r} dr = \frac{\mu N_1 I_1 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Flujo magnético conectado por la bobina primaria:

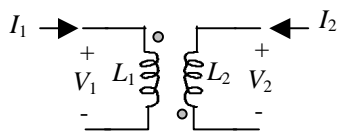
$$\Lambda_1 = \Lambda_{11} = N_1 \Phi_m = \frac{\mu N_1^2 I_1 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_{21} = N_2 \Phi_m = \frac{\mu N_1 N_2 I_1 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

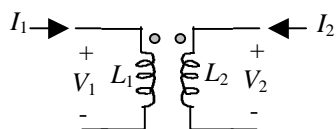
$$M_{21} = M = \frac{\mu N_1 N_2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

con $I_1 = 0$ se hallará: $L_2 = \frac{\mu N_2^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$



Los flujos mutuos se restan, por la ec. (4.10):

$$V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \text{ y } V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$



$$V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \text{ y } V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

coeficiente de acoplamiento magnético $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

En este ejemplo $k = 1$, por no considerar flujo de dispersión; en un transformador real $k < 1$.

Ejemplo 4.9

Un conductor rectilíneo infinito con corriente $I_1 = I_{1(t)}$ y una bobina compacta rectangular (N vueltas, resistencia R y autoinductancia L) son coplanares. La bobina se aleja con velocidad v_0 . Hallar la fem inducida en esta.

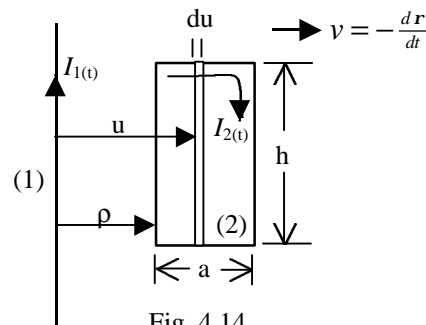


Fig. 4.14

Solución:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_{21} \cdot d\mathbf{S}_2 =$$

$$\Phi_{21} = \int_{u=r}^{r+a} \frac{\mu_0 I_{1(t)} h}{2\pi u} du = \frac{\mu_0 I_{1(t)} h}{2\pi} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

$$\Lambda_{21} = \frac{\mu_0 I_{1(t)} N h}{2\pi} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

Según ec. (4.9)a:

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) = M_{(r)}$$

$$fem_2 = -\frac{d\Lambda_2}{dt} = I_2 R$$

Siendo: $\Lambda_2 = \Lambda_{22} + \Lambda_{21}$

$$\Lambda_2 = M_{(r)} I_1 + L I_2,$$

$$fem_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - I_1 \frac{dM}{dr} \frac{dr}{dt} - L \frac{dI_2}{dt}$$

$$= -M \frac{dI_1}{dt} - I_1 v \frac{dM}{dr} - L \frac{dI_2}{dt}$$

Ordenando:

$$V = I_2 R + L \frac{dI_2}{dt} = -I_1 v \frac{dM}{dr} - M \frac{dI_1}{dt}$$

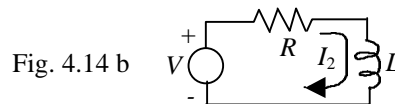


Fig. 4.14 b

Si la espira no fuese continua, siempre existirá el voltaje V .

Se puede encontrar:

$$V = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \left[\frac{I_1 a v}{(r+a)r} - \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \frac{dI_1}{dt} \right]$$

4.5 Corrientes de Foucault (eddy currents)

Cuando un conductor se desplaza a través de un campo magnético no uniforme o cuando aquel está en reposo dentro de un campo variable en el tiempo aparecen corrientes eléctricas que se cierran sobre si mismas en forma de remolinos.

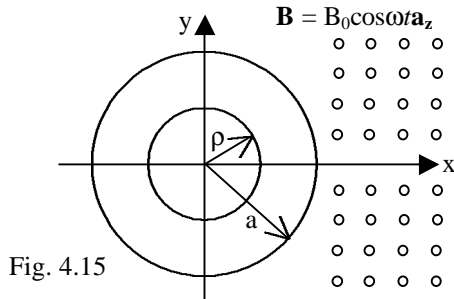


Fig. 4.15

Esta figura muestra un disco delgado (espesor e), con conductividad σ .

Del ejemplo 4.1: $\mathbf{E} = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin \omega t \mathbf{a}_\phi$

Y existe: $\mathbf{J} = \mathbf{sE} = \frac{B_0 \omega \mathbf{s} r}{2} \sin \omega t \mathbf{a}_\phi$

Sabemos: $dP_l = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \mathbf{s} E^2 dV$

$$P_l = \int_0^a \mathbf{s} \left[\frac{B_0 \omega r}{2} \sin \omega t \right]^2 [2\pi r e dr] = \frac{s p e (B_0 \omega a)^2}{8} \sin^2 \omega t$$

$$\langle P_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} P_l d(\omega t) = \frac{s p e (B_0 \omega a^2)^2}{16}$$

El disco se calienta. Este fenómeno se usa en los "hornos de inducción" (crisoles de inductancia) para el tratamiento térmico de metales. En otros casos el fenómeno es perjudicial (máquinas eléctricas) y sus efectos pueden atenuarse recurriendo a las laminaciones.

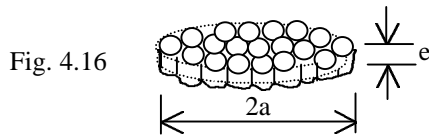


Fig. 4.16

El disco de la fig 4.15 es laminado cortándolo en N discos más pequeños, aislados entre sí, Sea b el radio de cada laminación:

$$p a^2 \approx N p b^2 \rightarrow b = a / \sqrt{N}$$

En cada laminación existe la corriente y la potencia ya calculadas:

$$\langle P_l \rangle = N \left\{ \frac{s p e (B_0 \omega)^2}{16} \left(\frac{a^2}{N} \right)^2 \right\} = \frac{s p e (B_0 \omega a^2)^2}{16 N}$$

4.6 Generador Homopolar: (Disco de Faraday):

Generador capaz de producir corrientes intensas con fem pequeña.

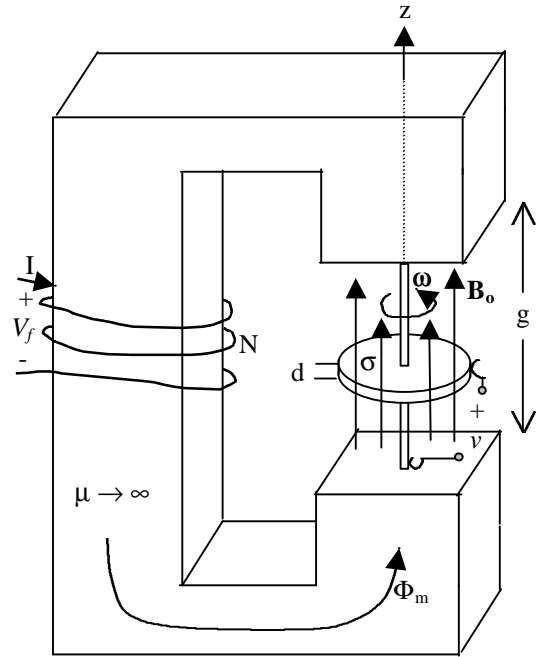


Fig 4.17a

En el entrehierro está el disco metálico (conductividad s) de radios R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) y espesor e . El núcleo del electroimán tiene sección recta media S .

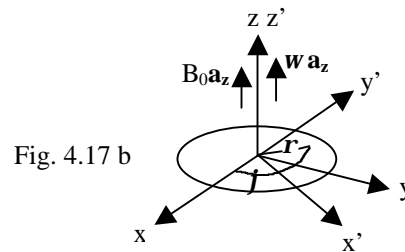


Fig. 4.17 b

En el sistema de referencia móvil: $\mathbf{E}' = 0$ dentro del disco, para el sistema de laboratorio: $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{E} = -(\dot{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = -(\omega \mathbf{a}_z \times r \mathbf{a}_{\hat{n}}) \times B_0 \mathbf{a}_z = -\omega B_0 r \mathbf{a}_{\hat{n}}$$

como $\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla f$

$$f_{R_1} - f_{R_2} = \int_{r=R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r=R_1}^{R_2} (-\omega B_0 r \mathbf{a}_{\hat{n}}) \cdot d r \mathbf{a}_{\hat{n}}$$

$$\Delta f = fem = -\frac{\omega B_0}{2} (R_2^2 - R_1^2) \text{ a circuito abierto}$$

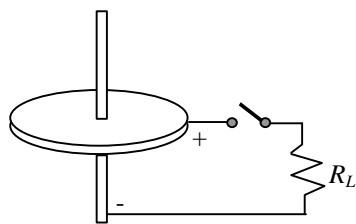
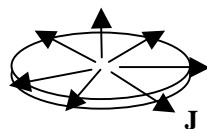


Fig. 4.17 c

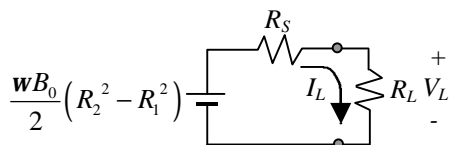


Anillo diferencial de radio r y espesor dr ; tiene:

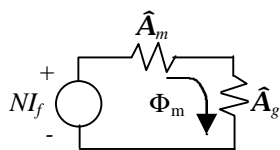
$$dR = \frac{dr}{2\pi r e s}$$

resistencia del disco

$$R_S = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r e s} = \frac{1}{2\pi e s} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

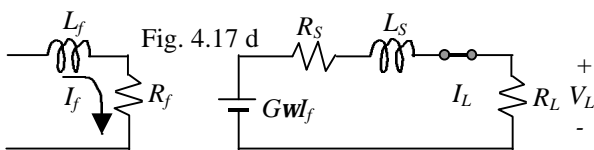


Para caracterizar esta máquina debemos expresar B_0 en función de I_f



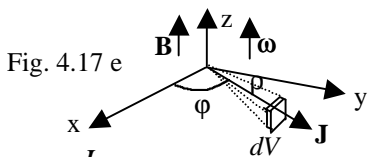
$$\Phi_m = \frac{NI_f}{\mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_g} \approx \frac{NI_f}{\mathfrak{R}_g} = \frac{\mu_0 S NI_f}{g}$$

$$\Phi_m = B_0 S \rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 NI_f}{g}$$



$$G = \frac{\mu_0 N}{g} (R_2^2 - R_1^2) \text{ coeficiente de rapidez}$$

Según lo visto en 4.3 cuando existe I_L aparece un torque (por interacción con B_0); la máquina prima debe vencer este torque para mantener la fem .



$$\mathbf{J} = \frac{I_L}{2\pi r e} \mathbf{a}_\phi \text{ ver figura 4.17 c}$$

De la sección 1.2: $d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$

$$d\mathbf{F} = \frac{I_L}{2\pi r e} \mathbf{a}_\phi \times B_0 \mathbf{a}_z (e r dj dr)$$

$$d\mathbf{F} = -\frac{I_L B_0}{2\pi} \mathbf{a}_\phi dj dr$$

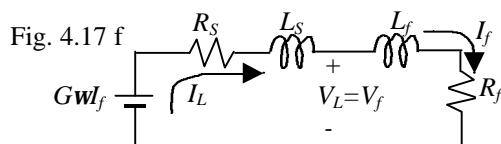
El torque relativo al eje:

$$d\hat{\mathbf{o}} = \hat{\mathbf{n}} \times d\mathbf{F} = r \mathbf{a}_\phi \times d\mathbf{F} = -\frac{I_L B_0}{2\pi} r \mathbf{a}_z dj dr$$

$$\hat{\mathbf{o}} = -\frac{I_L B_0}{2\pi} \mathbf{a}_z \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{j=0}^{2\pi} r dj dr$$

$$\hat{\mathbf{o}} = -\frac{I_L B_0}{2} (R_2^2 - R_1^2) \mathbf{a}_z = -GI_f I_L \mathbf{a}_z$$

Generador autoexcitado:



$$I_f = I_L = i$$

$$Gwi = L \frac{di}{dt} + Ri \quad \begin{cases} L = L_f + L_S \\ R = R_f + R_S \end{cases}$$

$$i = I_0 e^{-\left(\frac{R-Gw}{L}\right)t}$$

Sí $Gw > R$ la corriente aumenta desde el valor nominal I_0 (por remanencia en el núcleo) hasta ser limitada por la saturación.

Notas de aplicación práctica para este capítulo:

Para 4.2:

Sí B_0 depende de una corriente I_f podemos escribir:

$fem = k I_f v$, donde k incluye parámetros constantes

de la máquina (como la longitud de la barra "l"). Nótese que en el caso de un motor puede medirse k haciéndolo trabajar como generador.

Para 4.6:

Sí se desea conocer el coeficiente de fricción (existente en un caso real) usaremos la ecuación dinámica:

$$j \frac{dw}{dt} + \mathbf{V}w + \mathbf{t}_L = \mathbf{t}_m = k I_f I_a, \text{ en estado estable}$$

$$\frac{dw}{dt} = 0 \text{ y si además } \mathbf{t}_L = 0 \text{ (sin carga mecánica)}$$

$$\text{resulta: } \mathbf{V}w = k I_f I_a$$

$$\text{Para un motor serie: } I_f = I_a = I$$

$$\text{y resulta: } V = \frac{k I^2}{w}$$

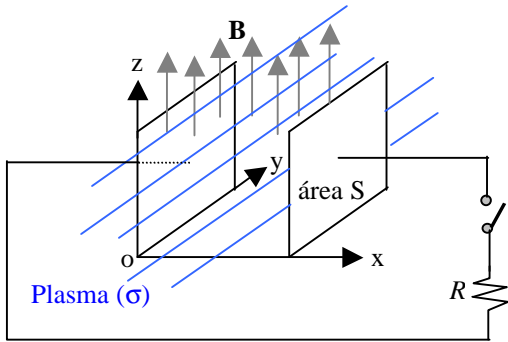
si se desea hallar j se desconecta el motor y se observa el tiempo para detenerse:

$$j \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{V}\mathbf{w} = 0 \rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 e^{-\left(\frac{\mathbf{V}}{j}\right)t}$$

si el tiempo es T: $j = - \frac{\mathbf{V}T}{\ln \left[\frac{\mathbf{w}(T)}{\mathbf{w}_0} \right]}$

Apéndice 4.1:

El generador Magneto-Hidro-Dinámico:



El plasma es un líquido o un gas altamente ionizado; asumiremos que la velocidad del fluido es \mathbf{v} y que existe $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$ en la región entre placas conductoras de área S, en $x = 0, l$. Sea $\mathbf{v} = v \mathbf{a}_y$.

Entonces: $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$

$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB_0 \mathbf{a}_x$ y la fem entre placas:

$fem = \frac{1}{q} \int_{x=0}^l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \mathbf{a}_x = qvB_0$ (a circuito abierto)

Notamos que este generador tendrá una resistencia interna $\frac{l}{sS}$ y al cerrar el switch circula:

$$I = \frac{vB_0 l}{R + \frac{l}{sS}} \rightarrow \mathbf{J} = \left(\frac{vB_0 l}{RS + \frac{l}{s}} \right) \mathbf{a}_x$$

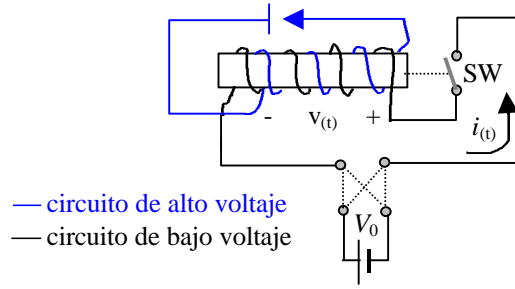
A veces es conveniente atribuir la fem a un "campo eléctrico equivalente" al verdadero agente que origina la fem (la circulación del fluido); este campo se llama "campo impreso": $\mathbf{J} = s \mathbf{E}^{ex}$, ex = externo

$$s \mathbf{E}^{ex} = \frac{vB_0 l}{RS + \frac{l}{s}} \mathbf{a}_x \rightarrow \mathbf{E}^{ex} = \left(\frac{l}{l + sRS} \right) vB_0 \mathbf{a}_x$$

$\mathbf{E}^{ex} \sim \mathbf{F}$

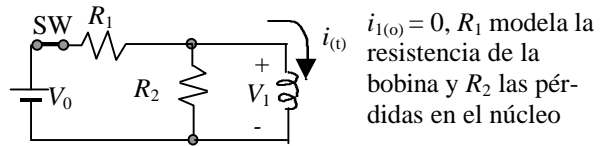
Apéndice 4.2: Carrete de Rhumkorf:

Dispositivo que usando el principio de inducción permite generar pulsos de alto voltaje a partir de una fuente dc de bajo voltaje.



Analizaremos el circuito de bajo voltaje; que esta formado por una bobina arrollada sobre un núcleo de hierro, de tal forma que el electroimán resultante atrae al contacto SW abriendo el circuito.

a) modelo con el SW cerrado:



$t = 0 \quad V_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 \quad i_1 = 0$

$t \rightarrow \infty \quad V_1 = 0 \quad i_1 = \frac{V_0}{R_1}$, luego:

$$V_{1(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad i_{1(t)} = \frac{V_0}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad t = \frac{L}{R}$$

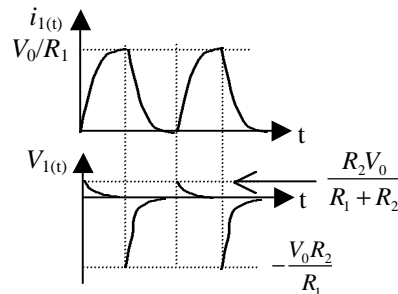
b) cuando i_1 alcanza cierto valor abre a SW, asumiremos que este estado corresponde a $t \rightarrow \infty$ ($t > 10\tau$)

$i_{1(0)} = \frac{V_0}{R_1} \quad t = 0 \quad i_1 = \frac{V_0}{R_1} \quad V_1 = - \frac{V_0 R_2}{R_1}$

$t \rightarrow \infty \quad i_1 = 0 \quad V_1 = 0$

$$V_{1(t)} = - \frac{V_0 R_2}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad i_{1(t)} = \frac{V_0}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

al desaparecer la corriente se cierra otra vez el SW y el ciclo se repite.



Si $V_0 R_2 / R_1$ es suficientemente grande se puede vencer la resistencia dieléctrica del aire y se observa una serie de chispas. Nótese que el alto voltaje tiene polaridad.